

Ad-Soyad :
Numara :

1	2	3	4	5	Toplam

08.04.20019

KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ DERSİ ARASINAVI

- $|z|=2$ ise $\frac{1}{35} \leq \left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$ olduğunu gösteriniz.
- $\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z+i) = \frac{\pi}{4} \right\}$ kümesini kartezyen koordinatlarda ifade edip, grafiğini çiziniz..
- $(-2 - 2\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$ karmaşık sayısının bütün köklerini bulunuz ve köklerin yerini karmaşık düzlemde gösteriniz. ($(-\pi, \pi]$ aralığını kullanınız)
- $e^z = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $z = n \cdot 2\pi i$ olmasıdır, ispatlayınız.
- a) $x=3$ doğrusunun $f(z) = iz + \bar{z}$ karmaşık dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz ve çiziniz.
b) $y=1$ doğrusunun $f(z) = z^2$ karmaşık dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz ve çiziniz.

Not : Sorular eşit puanlıdır. Süre 90 dakikadır.

Başarılar Dilerim...

Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

Karmaşık Fonksiyonlar Teo. Giriş Dersi Arasınava Yanıt Anıhtarı

1) Önce $\frac{1}{35} \leq \frac{1}{|z^4 - 4z^2 + 3|}$ olduğunu gösterelim. Bu ise

$|z^4 - 4z^2 + 3| \leq 35$ olduğunu göstermek demektir. Üçgen
eşitsizliği kullanılırsa

$$|z^4 - 4z^2 + 3| \leq |z|^4 + 4|z|^2 + 3 = 2^4 + 4 \cdot 2^2 + 3 = 35$$

olup, $\frac{1}{|z^4 - 4z^2 + 3|} \geq \frac{1}{35} \dots (1)$

bulunur.

Şimdi de $\frac{1}{|z^4 - 4z^2 + 3|} \leq \frac{1}{3}$ olduğunu gösterelim.

$$|z^4 - 4z^2 + 3| = |z^4 - (4z^2 - 3)| \quad \left(|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \right)$$
$$\geq ||z^4| - |4z^2 - 3|| \quad \dots (2)$$

(eşitsizliği kullanılırsa)

Yine

$$|4z^2 - 3| \leq 4|z|^2 + 3 = 4 \cdot 2^2 + 3 = 19 \Rightarrow -|4z^2 - 3| \geq -19$$

olup, bu ifade (2) de yerine yazılırsa

$$|z^4 - 4z^2 + 3| \geq ||z^4| - |4z^2 - 3|| \geq ||z^4| - 19| = |2^4 - 19| = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z^4 - 4z^2 + 3|} \leq \frac{1}{3} \dots (3)$$

elde edilir. (1) ve (3) den de istenen bulunur.

2) $z = x + iy$ denirse

$$\text{Arg}(z+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}(x+iy+i) = \frac{\pi}{4}$$

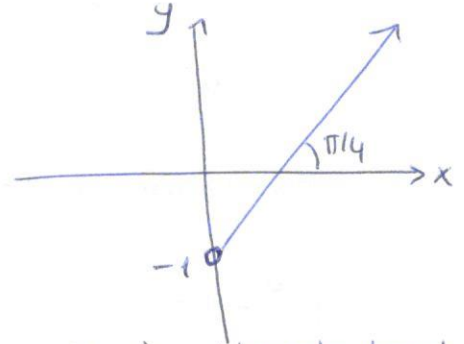
$$\tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad x > 0$$

$$\frac{y+1}{x} = \tan \frac{\pi}{4}, \quad x > 0$$

$$\frac{y+1}{x} = 1, \quad x > 0$$

$$y = x - 1, \quad x > 0$$

Bu ise, $(0, -1)$ noktasından başlayan, reel eksenle $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı yapan ışıdır.



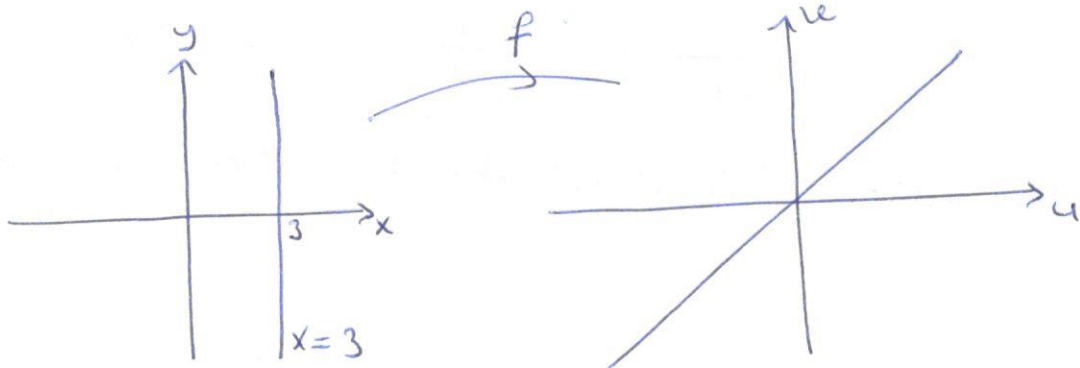
3) Defterinizde var.

4) Defterinizde var.

5) a) $z = 3 + iy, \quad -\infty < y < \infty$ (Defterinizdeki ödev sorunuz!)

$$\begin{aligned} w = u + iv &= f(3 + iy) = i(3 + iy) + \overline{(3 + iy)} = 3i - y + 3 - iy \\ &= -y + 3 + i(3 - y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = -y + 3 \\ v = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \boxed{v = u}$$



5. b) (Defterinizdeki ödev sorunuz)

$$z = x + iy, \quad -\infty < x < \infty$$

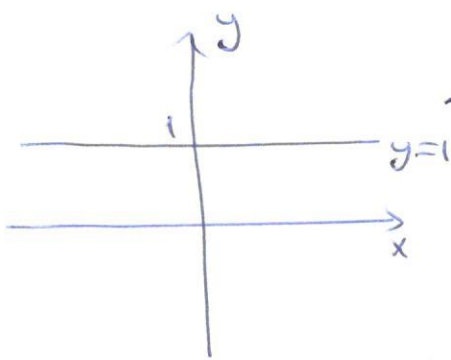
$$w = u + iv = f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - 1) + 2xi$$

$$\Rightarrow u = x^2 - 1$$

$$v = 2x \Rightarrow x = \frac{v}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow u = x^2 - 1 \\ \Rightarrow x = \frac{v}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow u = \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 1$$

$$u = \frac{v^2}{4} - 1 \quad \text{parabola}$$



$$f(z) = z^2$$

